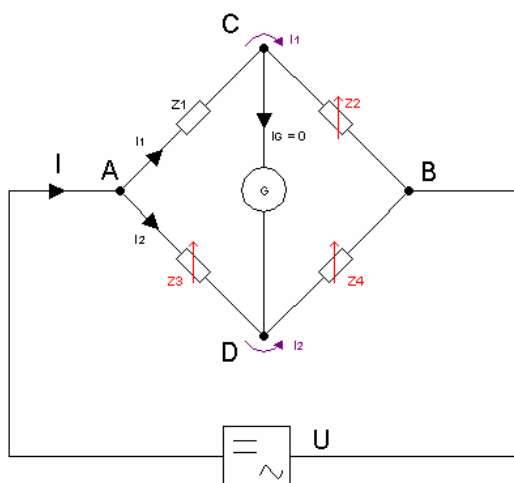




KOMPLEXNÁ PRÁCA Č. 1/4

RIEŠENIE WHEATSONOVHO MOSTÍKA



Piešťany , október 2003

Obsah:

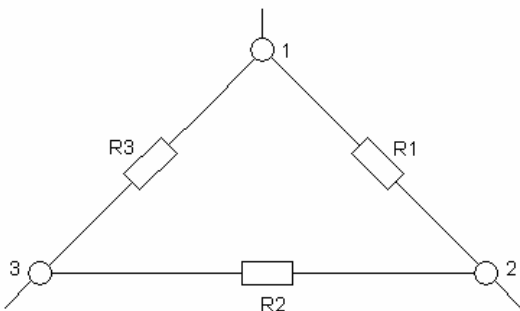
1. Teoretický rozbor Wheatsonovho mostíka
2. Teoretický rozbor merania odporu na Wheatsonovom mostíku
3. Výpočet parametrov Wheatsonovho mostíka zo zadaných hodnôt

1. Teoretický rozbor Wheatsonovho mostíka

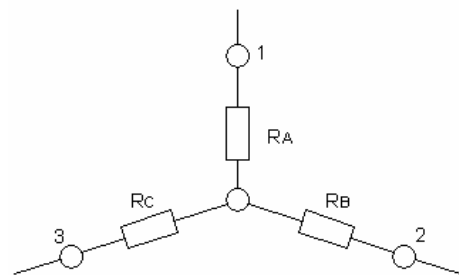
Wheatsonov mostík (ďalej už len WM) sa používa pre laboratórne meranie veľkosti odporu. Teoretické, komplexné riešenie WM, tj. určenie veľkosti prúdov a napätí na mostíku, vyžaduje znalosť **transfigurácie** (tj. premeny, pretvorenia).

V praxi sa najčastejšie vyskytuje potreba nahradiť tzv. zapojenie do **trojuholníka** zapojením do tzv. **hviezdy**.

Princíp transfigurácie, tj. premeny zapojenia v trojuholníku na zapojenie vo hviezde spočíva v tom, že výsledný odpor medzi bodmi 1, 2, 3 musí byť rovnaký.

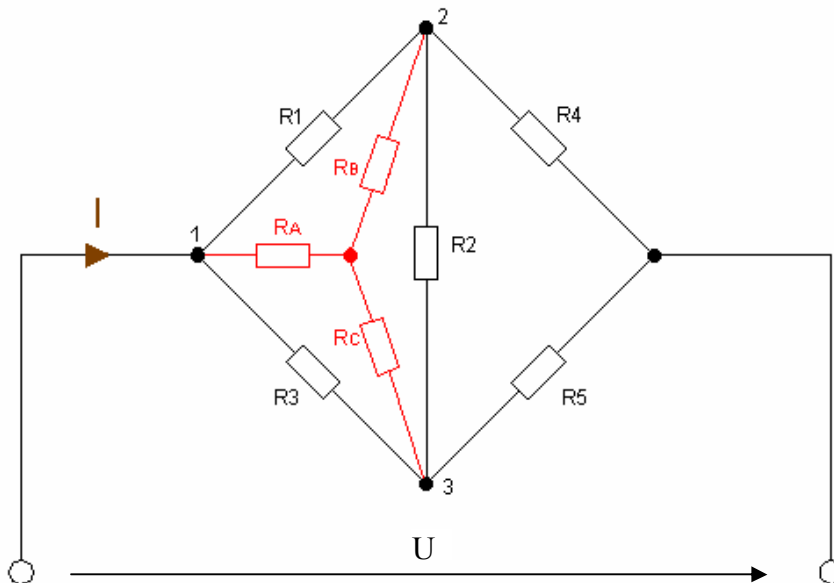


TROJUHOLNÍK



HVIEZDA

Transfigurácia ľavej strany WM (výpočet I_{R_4} , I_{R_5} , U_{R_4} , U_{R_5} , I , R):



A. Odpor medzi bodmi 1 a 2 v trojuholníku musí byť rovnaký ako odpor medzi bodmi 1 a 2 vo hviezde.

TROJUHLNÍK:

$$\frac{1}{{}_T R_{1,2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}$$

$$\frac{1}{{}_T R_{1,2}} = \frac{(R_2 + R_3) + R_1}{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}$$

$${}_T R_{1,2} = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

HVIEZDA:

$${}_H R_{1,2} = R_A + R_B$$

$${}_T R_{1,2} = {}_H R_{1,2}$$

$$\frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_B$$

B. Odpor medzi bodmi 1 a 3 v trojuholníku musí byť rovnaký ako odpor medzi bodmi 1 a 3 vo hviezde.

TROJUHLNÍK:

$$\frac{1}{{}_T R_{1,3}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{1}{{}_T R_{1,3}} = \frac{(R_1 + R_2) + R_3}{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}$$

$${}_T R_{1,3} = \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

HVIEZDA:

$${}_H R_{1,3} = R_A + R_C$$

$${}_T R_{1,3} = {}_H R_{1,3}$$

$$\frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_C$$

C. Odpor medzi bodmi 2 a 3 v trojuholníku musí byť rovnaký ako odpor medzi bodmi 2 a 3 vo hviezde.

TROJUHLNÍK:

$$\frac{1}{{}_T R_{2,3}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3}$$

$$\frac{1}{{}_T R_{2,3}} = \frac{(R_1 + R_3) + R_2}{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}$$

$${}_T R_{2,3} = \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

HVIEZDA:

$${}_H R_{2,3} = R_B + R_C$$

$${}_T R_{2,3} = {}_H R_{2,3}$$

$$\frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_B + R_C$$

V ďalšom výpočte použijem sústavu troch rovníc

$$\text{I.} \quad (1 - 2) \quad \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_B$$

$$\text{II.} \quad (1 - 3) \quad \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_C$$

$$\text{III.} \quad (2 - 3) \quad \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_B + R_C$$

Postup:

Použijem rovnice I. a III.

$$\text{I.} \quad \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_B$$

$$\text{III.} \quad \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_B + R_C$$

$$\text{I.} \quad R_B = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - R_A$$

$$\text{III.} \quad R_B + R_C = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$\left[\frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - R_A \right] + R_C = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_A$$

$$R_C = \frac{R_2 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_A$$

Dosadím do II. rovnice:

$$\text{II.} \quad \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_C$$

$$\frac{R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + \frac{R_2 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_A$$

$$2R_A = -\frac{R_2 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Odvodím si R_B z I. rovnice:

$$\text{I.} \quad R_B = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - R_A$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Odvodím si R_C z III. rovnice:

$$\text{III.} \quad R_B + R_C = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Teraz pristúpim ku komplexnému riešeniu WM a vypočítam nasledovné hodnoty:

- celkový prúd tečúci mostíkom(I)
- prúdy tečúce jednotlivými odporníkmi(I_{R1} , I_{R2} , I_{R3} , I_{R4} , I_{R5})
- napätia na jednotlivých odporníkoch(U_{R1} , U_{R2} , U_{R3} , U_{R4} , U_{R5})
- celkový odpor mostíka(R)

Použijem Ohmov zákon na výpočet celkového prúdu - I pričom U je dané:

$$I = \frac{U}{R}$$

Celkový odpor(R) WM:

$$R = R_A + R_{B,4,C,5}$$

$$\frac{1}{R_{B,4,C,5}} = \frac{1}{R_B + R_4} + \frac{1}{R_C + R_5}$$
$$\frac{1}{R_{B,4,C,5}} = \frac{R_4 + R_5 + R_B + R_C}{(R_B + R_4) \cdot (R_C + R_5)}$$
$$R_{B,4,C,5} = \frac{(R_B + R_4) \cdot (R_C + R_5)}{R_4 + R_5 + R_B + R_C}$$

Dosadím do rovnice:

$$R = R_A + \frac{(R_B + R_4) \cdot (R_C + R_5)}{R_4 + R_5 + R_B + R_C}$$

Použijem odvodené vzťahy pre R_A , R_B a R_C . Teraz dosadím za R_A a vypočítam celkový odpor WM:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{(R_B + R_4) \cdot (R_C + R_5)}{R_4 + R_5 + R_B + R_C}$$

Výpočet R realizujem dosadením príslušných hodnôt.

Pre výpočet prúdov a napätí na jednotlivých odporníkoch potrebujem vypočítať U_{RA}

$$U_{RA} = I \cdot R_A$$

Na zostatku obvodu bude napätie, ktoré označím ako U_1

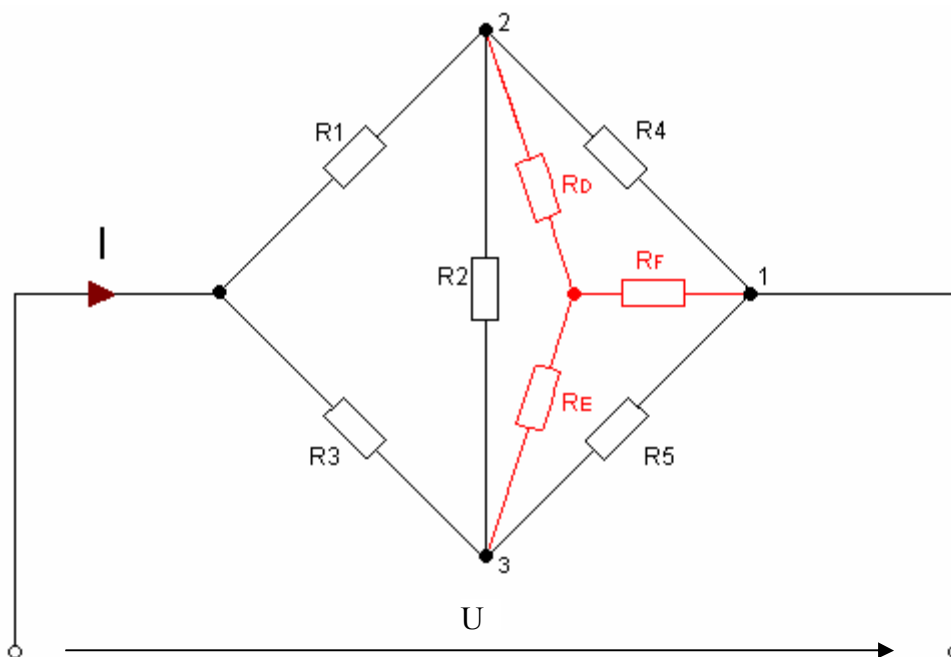
$$U_1 = U - U_{RA}$$

Teraz vyriešim prúdy tečúce hornou a spodnou vetvou, pričom horná vetva je tvorená R_B a R_4 a spodná vetva je tvorená R_C a R_5 .

$$I_{R4} = \frac{U_1}{R_B + R_4} \Rightarrow U_{R4} = I_{R4} \cdot R_4$$

$$I_{R5} = \frac{U_1}{R_C + R_5} \Rightarrow U_{R5} = I_{R5} \cdot R_5$$

Transfigurácia pravej strany WM (výpočet I_{R1} , I_{R3} , U_{R1} , U_{R3}):



A. Odpor medzi bodmi 1 a 2 v trojuholníku musí byť rovnaký ako odpor medzi bodmi 1 a 2 vo hviezde.

TROJUHOĽNÍK

$$\frac{1}{{}_T R_{1,2}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2 + R_5}$$

$$\frac{1}{{}_T R_{1,2}} = \frac{(R_2 + R_5) + R_4}{R_4 \cdot (R_2 + R_5)}$$

$${}_T R_{1,2} = \frac{R_4 \cdot (R_2 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5}$$

HVIEZDA:

$${}_H R_{1,2} = R_D + R_F$$

$${}_T R_{1,2} = {}_H R_{1,2}$$

$$\frac{R_4 \cdot (R_2 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_F$$

B. Odpor medzi bodmi 1 a 3 v trojuholníku musí byť rovnaký ako odpor medzi bodmi 1 a 3 vo hviezde.

TROJUHLNÍK:

$$\frac{1}{{}_T R_{1,3}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2 + R_4}$$

$$\frac{1}{{}_T R_{1,3}} = \frac{(R_2 + R_4) + R_5}{R_5 \cdot (R_2 + R_4)}$$

$${}_T R_{1,3} = \frac{R_5 \cdot (R_2 + R_4)}{R_2 + R_4 + R_5}$$

HVIEZDA:

$${}_H R_{1,3} = R_E + R_F$$

$${}_T R_{1,3} = {}_H R_{1,3}$$

$$\frac{R_5 \cdot (R_2 + R_4)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_E + R_F$$

C. Odpor medzi bodmi 2 a 3 v trojuholníku musí byť rovnaký ako odpor medzi bodmi 2 a 3 vo hviezde.

TROJUHLNÍK:

$$\frac{1}{{}_T R_{2,3}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4 + R_5}$$

$$\frac{1}{{}_T R_{2,3}} = \frac{(R_4 + R_5) + R_2}{R_2 \cdot (R_4 + R_5)}$$

$${}_T R_{2,3} = \frac{R_2 \cdot (R_4 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5}$$

HVIEZDA:

$${}_H R_{2,3} = R_D + R_E$$

$${}_T R_{2,3} = {}_H R_{2,3}$$

$$\frac{R_2 \cdot (R_4 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_E$$

V ďalšom výpočte použijem sústavu troch rovníc

$$\text{I.} \quad (1 - 2) \quad \frac{R_4 \cdot (R_2 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_F$$

$$\text{II.} \quad (1 - 3) \quad \frac{R_5 \cdot (R_2 + R_4)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_E + R_F$$

$$\text{III.} \quad (2 - 3) \quad \frac{R_2 \cdot (R_4 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_E$$

Postup:

Použijem rovnice I. a III.

$$\text{I.} \quad \frac{R_4 \cdot (R_2 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_F$$

$$\text{III.} \quad \frac{R_2 \cdot (R_4 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_E$$

$$\text{I.} \quad R_D = \frac{R_2 \cdot R_4 + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} - R_F$$

$$\text{III.} \quad \frac{R_2 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_E$$

$$\left[\frac{R_2 \cdot R_4 + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} - R_F \right] + R_E = \frac{R_2 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$R_E = \frac{R_2 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} - \frac{R_2 \cdot R_4 + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} + R_F$$

$$R_E = \frac{R_2 \cdot R_5 - R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} + R_F$$

Dosadím do II. rovnice:

$$\text{II.} \quad \frac{R_5 \cdot (R_2 + R_4)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_E + R_F$$

$$\frac{R_2 \cdot R_5 + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{R_2 \cdot R_5 - R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} + R_F + R_F$$

$$2R_F = -\frac{R_2 \cdot R_5 - R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} + \frac{R_2 \cdot R_5 + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$R_F = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

Odvodím si R_D z I. rovnice:

$$\text{I.} \quad R_D = \frac{R_2 \cdot R_4 + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} - R_F$$

$$R_D = \frac{R_2 \cdot R_4 + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} - \frac{R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$R_D = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4 + R_5}$$

Odvodím si R_E z III. rovnice:

$$\text{III.} \quad \frac{R_2 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_E$$

$$R_E = \frac{R_2 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} - \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$R_E = \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

Pre výpočet prúdov a napätí na jednotlivých odporníkoch potrebujem vypočítať U_{RF}

$$U_{RF} = I \cdot R_F$$

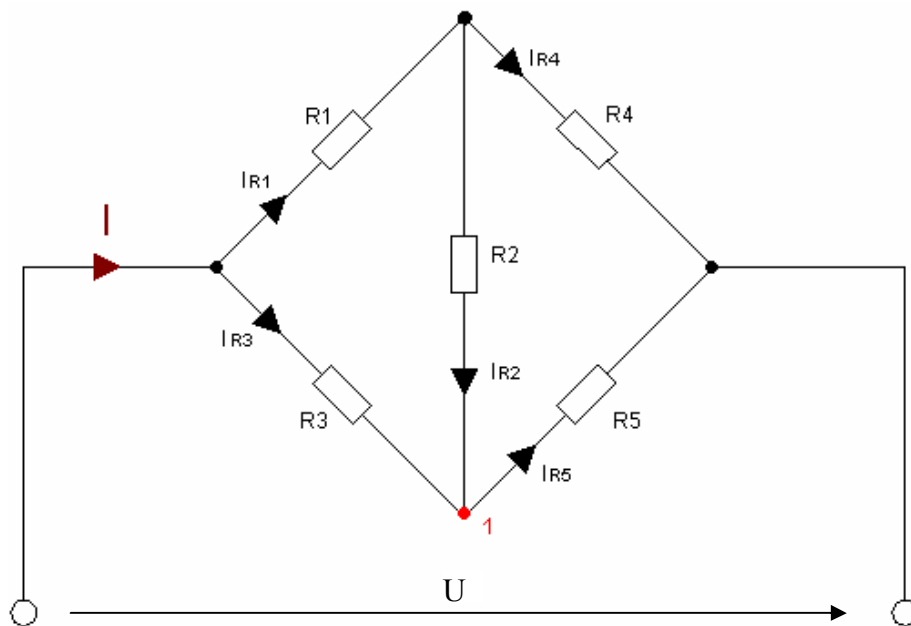
Na zostatku obvodu bude napätie, ktoré označím ako U_2

$$U_2 = U - U_{RF}$$

Teraz vyriešim prúdy tečúce hornou a spodnou vetvou, pričom horná vetva je tvorená R_D a R_1 a spodná vetva je tvorená R_E a R_3 .

$$I_{R1} = \frac{U_2}{R_D + R_1} \Rightarrow U_{R1} = I_{R1} \cdot R_1$$

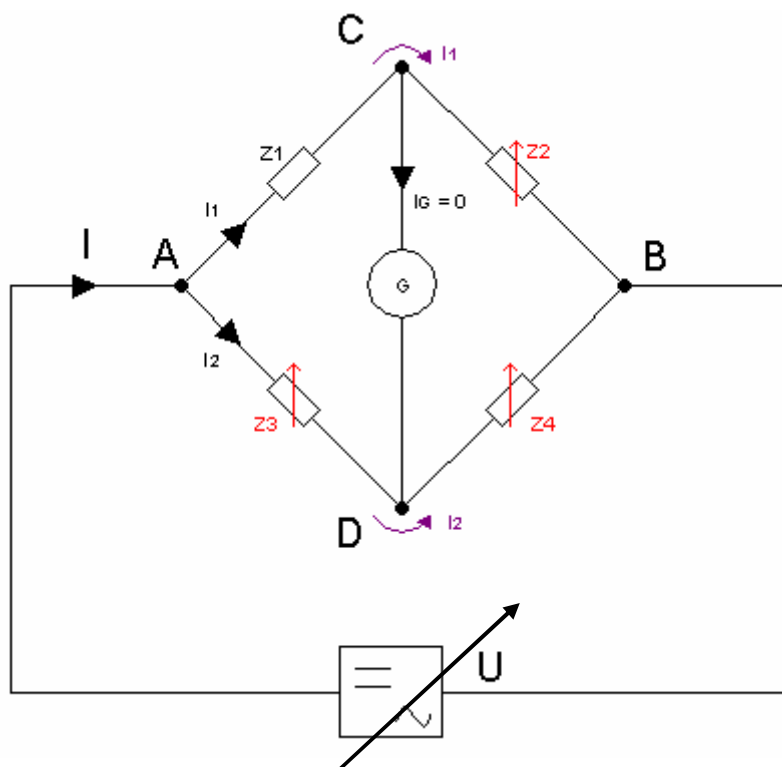
$$I_{R5} = \frac{U_2}{R_E + R_3} \Rightarrow U_{R3} = I_{R3} \cdot R_3$$



Ak poznám hodnoty prúdov I_{R1} , I_{R3} , I_{R4} , I_{R5} , vyriešim prúd I_{R2} a napätie U_{R2} pomocou I. KZ. Napr. uzol č.1:

$$I_{R3} + I_{R2} - I_{R5} = 0 \Rightarrow I_{R2} = I_{R5} - I_{R3} \Rightarrow U_{R2} = I_{R2} \cdot R_2$$

2. Teoretický rozbor merania odporu na WM



Teória obecného mostíka

Na meranie odporu používame tzv. vyvážený mostík. Základné zapojenie je zrejmé zo schémy. Obecne nemusíme používať termín odpor, ale môžeme hovoriť o impedancii. Impedancia Z_1 nech je neznáma; $Z_1 = Z_x$. Impedancie Z_2 , Z_3 , Z_4 sú známe a aspoň dve z nich sú premenné (regulovateľné).

Tzv. vyvažovanie mostíka spočíva v tom, že impedancie Z_2 , Z_3 , Z_4 meníme tak dlho, až kým diagonálou nepreteká žiadny prúd.

V praxi to realizujeme tak, že do diagonály zapojíme multimeter prepnutý na najmenší možný rozsah ($200\mu\text{A}$).

Pre vyvážený stav platí:

- 1) Medzi bodmi C a D nesmie byť žiadne napätie, tj. že potenciál bodu C sa musí rovnať potenciálu bodu D.
- 2) Z toho vyplýva, že úbytok napätia na Z_1 sa musí rovnať úbytku napätia na Z_3 a súčasne úbytok napätia na Z_2 sa musí rovnať úbytku napätia na Z_4 .

Matematické vyjadrenie poslednej napísanej podmienky je nasledovné:

$$I_1 \cdot Z_1 = I_2 \cdot Z_3$$

$$I_1 \cdot Z_2 = I_2 \cdot Z_4$$

Rovnice vydělím:

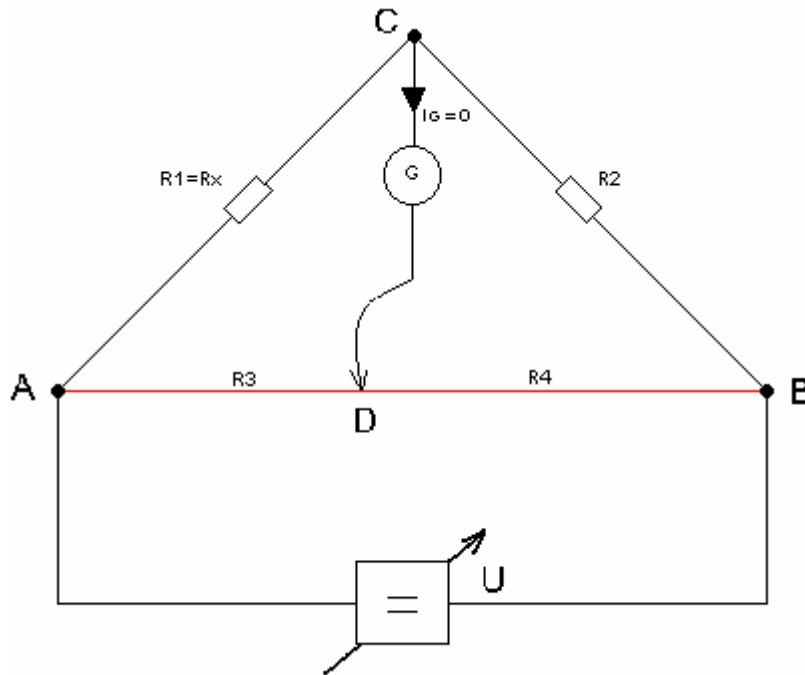
$$\frac{I_1 \cdot Z_1}{I_1 \cdot Z_2} = \frac{I_2 \cdot Z_3}{I_2 \cdot Z_4} \Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \Rightarrow Z_1 = Z_2 \cdot \frac{Z_3}{Z_4}$$

V prípade jednosmerného WM možno nahradiť impedanciu priamo odporom a dostanem vzťah:

$$R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4}$$

POZNÁMKA:

Jednoduchý WM možno vyrovnávať tak, že odpory R_3 a R_4 sú tvorené odporovým vodičom a vyrovnávanie realizujeme posuvom bežca(bod D) po tomto odporovom vodiči. Schéma je nasledovná:



Z elektrotechniky vieme, že odpor vodiča sa dá vyjadriť pomocou vzťahu:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

ρ - merný odpor, fyz. konšt. [Ωm]

l - dĺžka vodiča [m]

S - prierez vodiča [m^2]

Teda :

$$R_3 = \rho \cdot \frac{l_3}{S}$$

$$R_4 = \rho \cdot \frac{l_4}{S}$$

Dosadím:

$$R_x = R_2 \cdot \frac{\rho \cdot \frac{l_3}{S}}{\rho \cdot \frac{l_4}{S}} = R_2 \cdot \frac{l_3}{l_4}$$

ZÁVER:

Z odvodeného vzťahu vyplýva, že dosadzujeme presné úseky l_3 , l_4 s presnosťou na 1mm.

Meranie je silne ovplyvnené prechodnými odpormi.

3. Výpočet parametrov WM zo zadaných hodnôt

Parametre WM budem počítať z nasledovných zadaných hodnôt:

$$R_1 = 100\Omega, R_2 = 270\Omega, R_3 = 47\Omega, R_4 = 390\Omega, R_5 = 68\Omega, U = 10,5V, I = 150mA$$

Postup výpočtu:

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{100 \cdot 47}{100 + 270 + 47} = 11,27\Omega \quad R_D = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{270 \cdot 390}{270 + 390 + 68} = 144,64\Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{100 \cdot 270}{100 + 270 + 47} = 64,74\Omega \quad R_E = \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{270 \cdot 68}{270 + 390 + 68} = 25,21\Omega$$

$$R_C = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{270 \cdot 47}{100 + 270 + 47} = 30,43\Omega \quad R_F = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{390 \cdot 68}{270 + 390 + 68} = 36,42\Omega$$

$$R = R_A + \frac{(R_B + R_4) \cdot (R_C + R_5)}{R_4 + R_5 + R_B + R_C} = 11,27 + \frac{454,74 \cdot 98,43}{553,17} = 92,185\Omega$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{10,5}{92,185} = 0,113A$$

$$U_{RA} = I \cdot R_A = 0,113 \cdot 11,27 = 1,273V$$

$$U_1 = U - U_{RA} = 10,5 - 1,273 = 9,227V$$

$$I_{R4} = \frac{U_1}{R_B + R_4} = \frac{9,227}{64,74 + 390} = 0,02A \Rightarrow U_{R4} = I_{R4} \cdot R_4 = 0,02 \cdot 390 = 7,8V$$

$$I_{R5} = \frac{U_1}{R_C + R_5} = \frac{9,227}{30,43 + 68} = 0,093A \Rightarrow U_{R5} = I_{R5} \cdot R_5 = 0,093 \cdot 68 = 6,324V$$

$$U_{RF} = I \cdot R_F = 0,113 \cdot 36,42 = 4,115V$$

$$U_2 = U - U_{RF} = 10,5 - 4,115 = 6,385V$$

$$I_{R1} = \frac{U_2}{R_D + R_1} = \frac{6,385}{144,64 + 100} = 0,026A \Rightarrow U_{R1} = I_{R1} \cdot R_1 = 0,026 \cdot 100 = 2,6V$$

$$I_{R3} = \frac{U_2}{R_E + R_3} = \frac{6,385}{25,21 + 47} = 0,088A \Rightarrow U_{R3} = I_{R3} \cdot R_3 = 0,088 \cdot 47 = 4,136V$$

$$I_{R2} = I_{R1} - I_{R4} = 0,026 - 0,02 = 0,006A \Rightarrow U_{R2} = I_{R2} \cdot R_2 = 0,006 \cdot 270 = 1,62V$$