

## Obsah:

1. Riešenie Wheatsonovho mostíka
2. Meranie odporu na Wheatsonovom mostíku
3. Meranie Wheatsonovho mostíka

OK

## RIEŠENIE WHEATSONOVHO MOSTÍKA

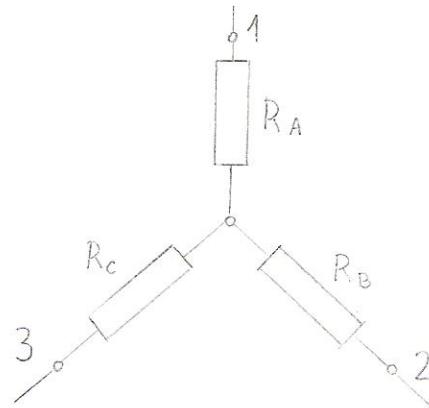
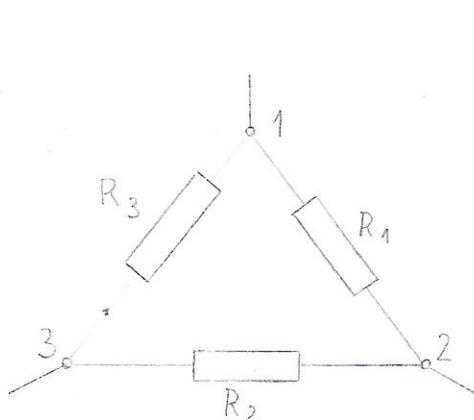
Wheatsonov mostík sa používa pre laboratórne meranie veľkosti odporu.

Teoretické kompletné riešenie Wheatsonovho mostíka, t.j. určenie

- veľkosti prúdov  
- a napäť

na mostíku vyžaduje znalosť transfigurácie (t.j. predtvorenie, premena) zapojenia.

V praxi sa najčastejšie vyskytuje potreba nahradieť tzv. zapojenie do trojuholníka, zapojením do hviezdy. Princíp transfigurácie, t.j. premeny zapojenia v trojuholník na zapojenie v hviezdu spočíva v tom, že výsledný odpor medzi bodmi 1,2,3 musí byť rovnaký.



- a. Odpor medzi bodmi 1 a 2 v trojuholníku musí byť rovnaký ako odpor medzi bodmi 1 a 2 vo hviezde.

### Trojuholník

$$\frac{1}{R_{1+2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}$$

$$\frac{1}{R_{1,2}} = \frac{(R_2 + R_3) + R_1}{R_1(R_2 + R_3)}$$

$$\frac{1}{R_{1,2}} = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

### Hviezda

$$R_{1+2} = R_A + R_B$$

$$R_{1,2} = R_{1,2}$$

$$\frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_B$$

b. Odpor medzi odpormi 1 a 3 v trojuholníku musí byť rovnaký ako medzi bodmi 1 a 3 vo hviezde.

### Trojuholník

$$\frac{1}{T R_{13}} = \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{1}{T R_{13}} = \frac{(R_1 + R_2) + R_3}{R_3(R_1 + R_2)}$$

$$\frac{1}{T R_{13}} = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

### Hviezda

$$H R_{13} = R_A + R_C$$

$$T R_{13} = H R_{13}$$

$$\boxed{\frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_C}$$

c. Odpor medzi odpormi 2 a 3 v trojuholníku musí byť rovnaký ako odpor medzi bodmi 2 a 3 vo hviezde.

### Trojuholník

$$\frac{1}{T R_{23}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3}$$

$$\frac{1}{T R_{23}} = \frac{(R_1 + R_3) + R_2}{R_2(R_1 + R_3)}$$

$$\frac{1}{T R_{23}} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

### Hviezda

$$H R_{23} = R_B + R_C$$

$$T R_{23} = R_{23}$$

$$\boxed{\frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_B + R_C}$$

Záver: Pre ďalší výpočet máme pripravenú sústavu 3. rovníc:

I.  $\frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_B$

II.  $\frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_C$

III.  $\frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_B + R_C$

Použijeme rovnice I. a III.

$$\frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_B$$

$$\frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_B + R_C$$


---

$$I. \quad R_B = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - R_A$$

$$III. \quad R_B + R_C = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$\left[ \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - R_A \right] + R_C = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1 + R_2 + R_3 - R_1 R_2 - R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_A$$

$$R_C = \frac{R_1 + R_2 + R_3 - R_1 R_2 - R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_A$$

$$R_C = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_A$$

Dosadíme do druhej rovnice

pôvodný tvar

$$\frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_C$$

$$\frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + \frac{R_2 R_3 - R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_A$$

$$2R_A = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$2R_A = \frac{-R_2 R_3 + R_1 R_3 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$2R_A = \frac{2R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_A = \frac{R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Odvodenie  $R_B$

Vyjdeme z rovnice I.

$$\frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_B$$

$$R_B = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} - R_A$$

$$R_B = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{R_1 + R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 - R_1R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Odvodenie  $R_C$ , dosadíme do III. rovnice

$$\text{III. } \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_B + R_C$$

$$R_C = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} - R_B$$

$$R_C = \frac{R_2R_1 + R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1R_2 + R_2R_3 - R_1R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

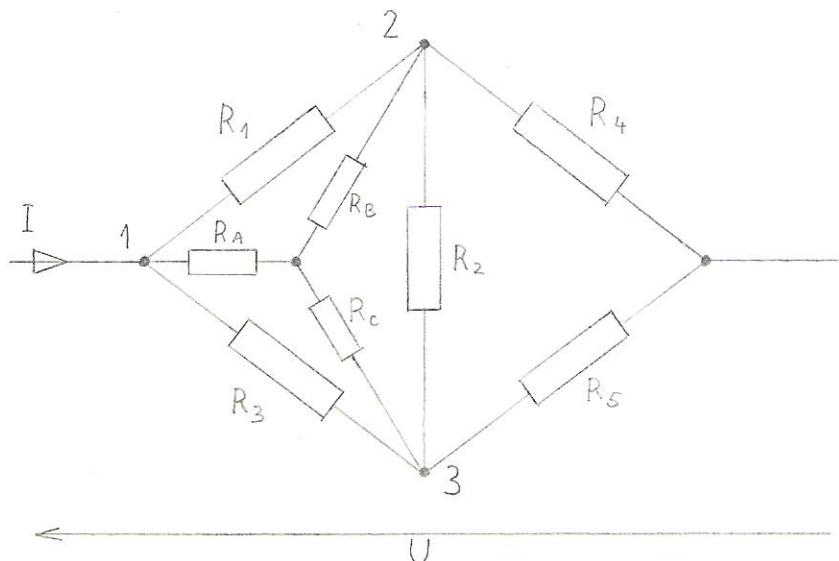
$$R_C = \frac{R_2R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Teraz prikročíme ku komplexnému riešeniu Wheatsonovho mostíka.  
Máme vypočítať:

$I$  – celkový prúd tečúci mostíkom

$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5$  – prúdy tečúce jednotlivými odpormi

$U_1, U_2, U_3, U_4, U_5$  – napäcia na jednotlivých odporoch



Použijeme Ohmov zákon  $I = \frac{U}{R}$

$U$  – nastavené (zadané)

$R = R_{A,B,C} + R_{B,4,C,5}$  (paralelne zapojené  $R_B + R_4$  a  $R_C + R_5$ )

$$\frac{1}{R_{B,A,C,5}} = \frac{1}{R_B + R_4} + \frac{1}{R_C + R_5}$$

$$\frac{1}{R_{B,A,C,5}} = \frac{(R_C + R_5) + (R_B + R_4)}{(R_B + R_4)(R_C + R_5)}$$

$$\frac{1}{R_{B,A,C,5}} = \frac{R_4 + R_5 + R_B + R_C}{(R_B + R_4)(R_C + R_5)}$$

$$R_{B,A,C,5} = \frac{(R_B + R_4)(R_C + R_5)}{R_4 + R_5 + R_B + R_C}$$

$$R = R_A + \frac{(R_B + R_4)(R_C + R_5)}{R_4 + R_5 + R_B + R_C}$$

Použijeme odvodené vzťahy pre  $R_A, R_B$  a  $R_C$ ; teraz dosadíme za  $R_A$ .

$$R = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{(R_B + R_4)(R_C + R_5)}{R_4 + R_5 + R_B + R_C}$$

Úpravou tohto vzťahu na spoločného menovateľa nezískame zjednodušený tvar;  
Výpočet R realizujeme dosadením príslušných hodnôt v  $\Omega$ .

$$U_{RA} = I \cdot R_A$$

Na zostatku obvodu bude napätie  $U_1$

$$U_1 = U - U_{RA};$$

Teraz vyriešime prúdy tečúce hornou a dolnou väzbou.

Horná väzba –  $R_B + R_4$

Dolná väzba –  $R_C + R_5$

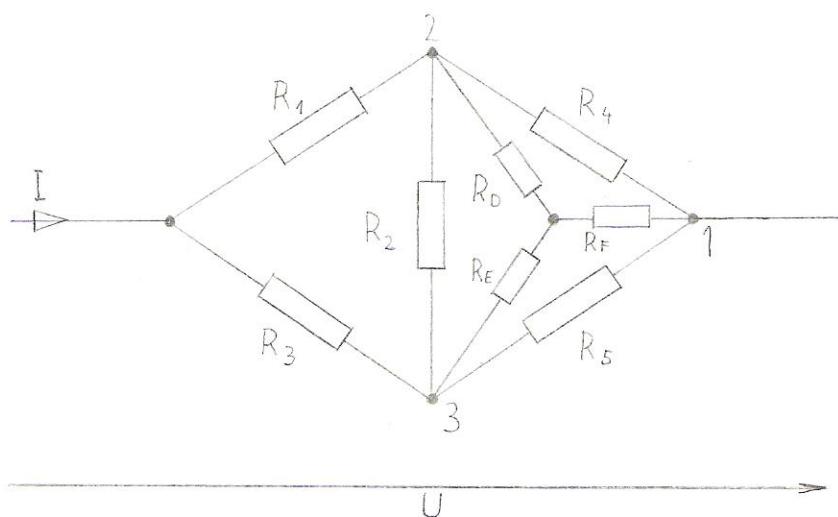
$$I_{R4} = \frac{U_1}{R_B + R_4}$$

$$I_{R5} = \frac{U_1}{R_C + R_5}$$

$$U_{R4} = I_{R4} \cdot R_4$$

$$U_{R5} = I_{R5} \cdot R_5$$

Zavedieme transfiguráciu pravej strany



Vykonáme transfiguráciu pravej strany pre výpočet  $I_{R1}$ ,  $U_{R1}$ ,  $I_{R3}$ ,  $U_{R3}$ .  
Po príslušných výpočtoch a úpravách vyjdú nasledovné vzťahy:

$$R_D = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$R_E = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$R_F = \frac{R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$U_{RF} = I \cdot R_F$$

$$U = U - U_{RF}$$

$$I_{R1} = \frac{U_2}{R_D + R_1}$$

$$I_{R3} = \frac{U_2}{R_E + R_3}$$

$$1-2 \quad R_D + R_F = \frac{R_4(R_2 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$1-3 \quad R_D + R_E = \frac{R_2(R_4 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$2-3 \quad R_E + R_F = \frac{R_5(R_2 + R_4)}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$R_D = -R_F + \frac{R_4 R_2 + R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{-R_4 R_5 + R_4 R_2 + R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{R_4 R_2}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$R_E = -R_F + \frac{R_5 R_2 + R_5 R_4}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{-R_4 R_5 + R_5 R_2 + R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$-R_F \cdot R_F + \frac{R_4 R_2 + R_4 R_5 + R_5 R_2 + R_5 R_4}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{R_2 R_4 + R_2 R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$\frac{2 \cdot R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = 2 R_F$$

Po príslušných výpočtoch a úpravách výjdu nasledovné vzťahy:

$$R_F = \frac{R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$R_E = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$R_D = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$U_{RF} = I \cdot R_F$$

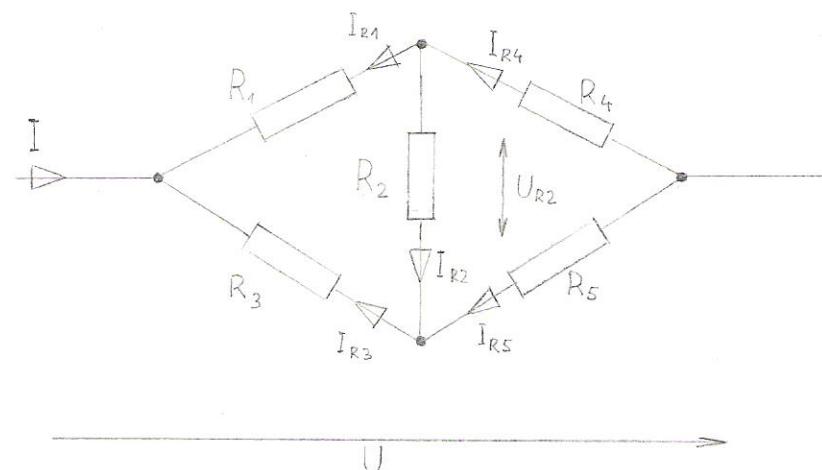
$$U_2 = U - U_{RF}$$

$$I_{R1} = \frac{U_2}{R_D + R_1}$$

$$I_{R3} = \frac{U_2}{R_E + R_3}$$

$$U_{R1} = I_{R1} \cdot R_1$$

$$U_{R3} = I_{R3} \cdot R_3$$



Na záver rozboru Wheatsonovho mostíka sa zameriame na vyriešenie prúdu  $I_{R2}$  a napäťia  $U_{R2}$ . Aby sme toto mohli vyriešiť, musíme mať vypočítané hodnoty prúdov  $I_{R1}$ ,  $I_{R2}$ ,  $I_{R3}$ ,  $I_{R4}$ ,  $I_{R5}$ .

Pre názornosť si vezmieme uzol č. 3.

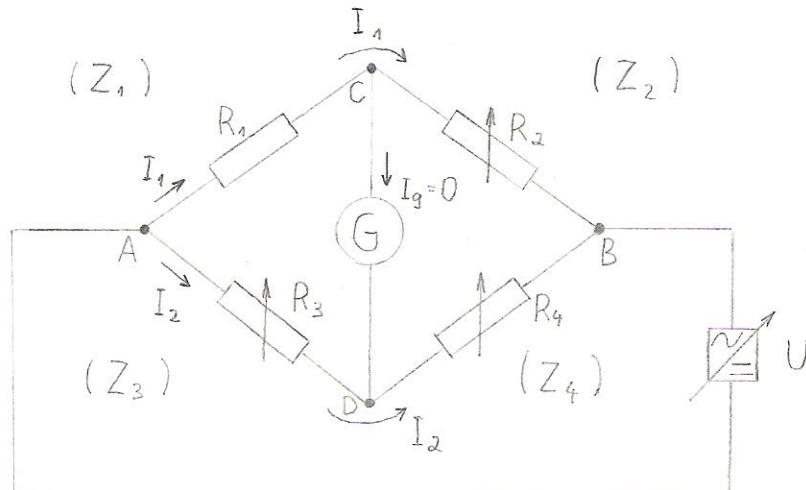
Výpočtom nám vyšlo, že prúd  $I_{R3}$  je väčší ako  $I_{R5}$ , čiže v zmysle I. Kirchhoffovho zákona bude platiť rovnica:

$$I_{R3} = I_{R2} + I_{R5}$$

$$I_{R2} = I_{R3} - I_{R5}$$

$$U_{R2} = I_{R2} \cdot R_2$$

## MERANIE ODPORU NA WHEATSONOVOM MOSTÍKU



### Teória obecného mostíku

Na meranie – výpočet odporu používame tzv. vyvážený mostík. Základné zapojenie je zrejmé zo schémy. Obecne nemusíme používať termín odpor ale impedancia.

Impedancia  $Z_1$  nech je neznáma  $Z_1 = Z_x$ .

Impedancie  $Z_2, Z_3, Z_4$  sú známe a aspoň dve z nich sú premenné (regulovateľné).

Tzv. vyvažovanie mostíka spočíva v tom, že impedancie  $Z_2, Z_3, Z_4$  meníme tak dlho, až diagonálou nepreteká žiadny prúd.

V praxi to realizujeme tak, že do diagonály zapojíme multimeter prepnutý na najmenší rozsah ( $200\mu\text{A}$ ).

Pre vyvážený stav platí:

- Medzi bodmi C a D nesmie byť žiadne napätie, t.j. potenciál bodu C= potenciálu bodu D;
- Ztoho vyplýva, že úbytok napäcia na impedancii  $Z_1$ = Úbytku napäcia na impedancii  $Z_3$  a súčasne úbytku napäcia na impedancii  $Z_4$ .

Matematické vyjadrenie poslednej podmienky:

$$I_1 Z_1 = I_1 Z_3$$

$$I_1 Z_2 = I_2 Z_4$$

Rovnice vydeleníme

$$\frac{I_1 \cdot Z_1}{I_1 \cdot Z_2} = \frac{I_2 \cdot Z_3}{I_2 \cdot Z_4}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$$

$$Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3 \quad (Z_1 = Z_x)$$

$$Z_x Z_4 = Z_2 Z_3$$

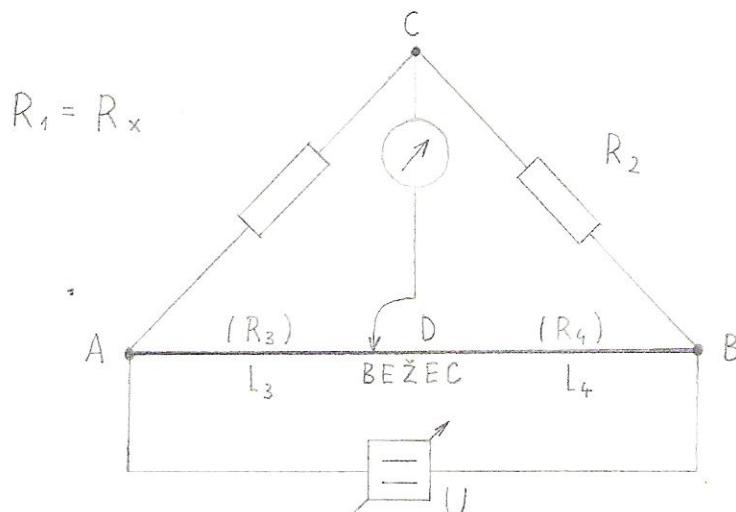
$$Z_x = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_4}$$

V prípade jednosmerného mostíku možno nahradíť impedanciu priamo odporom a dostávame vzťah:

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$

Poznámka: Jednoduchý Wheatsonov mostík možno vyrovnávať tak, že odpory  $R_3$  a  $R_4$  sú tvorené odporovým vodičom a vyrovnávanie realizujeme posuvom bežca (D) po tomto odporovom vodiči.

Schéma zapojenia bude nasledovná:



Z elektrotechniky vieme, že odpor vodiča sa dá vyjadriť:

$$R = \sigma \frac{l}{S}$$

$\sigma$  - merný odpor

$l$  - dĺžka vodiča

$S$  - prierez vodiča

$$R_3 = \sigma \frac{l_3}{S}$$

$$R_x = R_2 \frac{R_3}{R_4}$$

$$R_4 = \sigma \frac{l_4}{S}$$

$$R_x = R_2 \frac{\sigma \frac{l_3}{S}}{\sigma \frac{l_4}{S}}$$

$$R_x = R_2 \frac{l_3}{l_4}$$

Záver:

S odvodeného vzťahu – dosadzujeme presné úseky  $l_3$  a  $l_4$  (s presnosťou na mm).

Pozor!

Meranie je silne ovplyvnené prechodovými odpormi.

## MERANIE WHEATSONOVHO MOSTÍKA

$$R_1 = 240\Omega$$

$$R_2 = 660\Omega$$

$$R_3 = 180\Omega$$

$$R_4 = 330\Omega$$

$$R_5 = 600\Omega$$

$$U_{NAP} = 18V$$


---

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{240 \cdot 180}{240 + 660 + 180} = \frac{43200}{1080} = \underline{\underline{40\Omega}}$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{240 \cdot 660}{1080} = \frac{158400}{1080} = \underline{\underline{146\Omega}}$$

$$R_C = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{660 \cdot 180}{1080} = \frac{118800}{1080} = \underline{\underline{110\Omega}}$$

$$\begin{aligned} R &= \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{(R_B + R_4)(R_C + R_5)}{R_4 + R_5 + R_B + R_C} = \frac{43200}{1080} + \frac{(146 + 330)(110 + 600)}{930 + 256} = \\ &= \frac{43200}{1080} + \frac{16060 + 87600 + 36300 + 198000}{1186} = \frac{43200}{1080} + \frac{337960}{1186} = \frac{51235200 + 364996800}{1280880} = \\ &= \frac{416232000}{1280880} = \underline{\underline{325\Omega}} \end{aligned}$$

$$I = \frac{U}{R} = \frac{18}{325} = 0,05A$$

$$I = 0,05A = \underline{\underline{50mA}}$$

$$R_D = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{680.330}{680 + 330 + 600} = \frac{224400}{1610} = \underline{\underline{139\Omega}}$$

$$R_E = \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{660.600}{1610} = \frac{396000}{1610} = \underline{\underline{246\Omega}}$$

$$R_F = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{330.600}{1610} = \frac{198000}{1610} = \underline{\underline{123\Omega}}$$

$$U_{RA} = I \cdot R_A$$

$$U_{RA} = 0,05.40$$

$$\underline{\underline{U_{RA} = 2V}}$$

$$U_1 = U - U_{RA}$$

$$U_1 = 18 - 2$$

$$\underline{\underline{U_1 = 16V}}$$

$$I_{R4} = \frac{U_1}{R_B + R_4} = \frac{16}{476} = 0,03A$$

$$\underline{\underline{I_{R4} = 30mA}}$$

$$I_{R5} = \frac{U_1}{R_C + R_5} = \frac{16}{710} = 0,022A$$

$$\underline{\underline{IR5 = 22mA}}$$

$$U_{R4} = I_{R4} \cdot R_4 = 0,03.330 = \underline{\underline{9,9V}}$$

$$U_{R5} = I_{R5} \cdot R_5 = 0,022.600 = \underline{\underline{13,2V}}$$

$$U_{RF} = I \cdot R_F$$

$$U_{RF} = 0,05.123 = \underline{\underline{6,15V}}$$

$$U_2 = U - U_{RF}$$

$$U_2 = 16 - 6,15$$

$$\underline{\underline{U_2 = 9,85V}}$$

$$I_{R1} = \frac{U_2}{R_D + R_1} = \frac{9,85}{379} = 0,025A$$

$$\underline{\underline{I_{R1} = 25mA}}$$

$$I_{R3} = \frac{U_2}{R_E + R_3} = \frac{9,85}{426} = 0,023A$$

$$\underline{\underline{I_{R3} = 23mA}}$$

$$U_{R1} = I_{R1} \cdot R_1 = 0,025240 = \underline{\underline{6V}}$$

$$U_{R3} = I_{R3} \cdot R_3 = 0,023180 = \underline{\underline{4,14V}}$$

$$I_{R2} = I_{R3} - I_{R5}$$

$$I_{R2} = 0,023 - 0,022$$

$$I_{R2} = 0,001A$$

$$\underline{\underline{I_{R2} = 1mA}}$$

$$U_{R2} = I_{R2} \cdot R_2 = 0,001660 = \underline{\underline{0,66V}}$$

Tabuľka:

	R <sub>OZN</sub> [Ω]	R <sub>ZME</sub> [Ω]	I <sub>VYP</sub> [A]	I <sub>ZME</sub> [A]	U <sub>VYP</sub> [V]	U <sub>ZME</sub> [V]
R <sub>1</sub>	240		25mA		6,0	
R <sub>2</sub>	660		1mA		0,66	
R <sub>3</sub>	180		23mA		4,14	
R <sub>4</sub>	330		30mA		9,9	
R <sub>5</sub>	600		22mA		13,2	