

Riešenie Wheatsonovho mostíka (WM)

1. Teoretický rozbor Wheatsonovho mostíka
2. Teoretický rozbor merania odporu na Wheatsonovom mostíku
3. Výpočet parametrov Wheatsonovho mostíka zo zadaných hodnôt

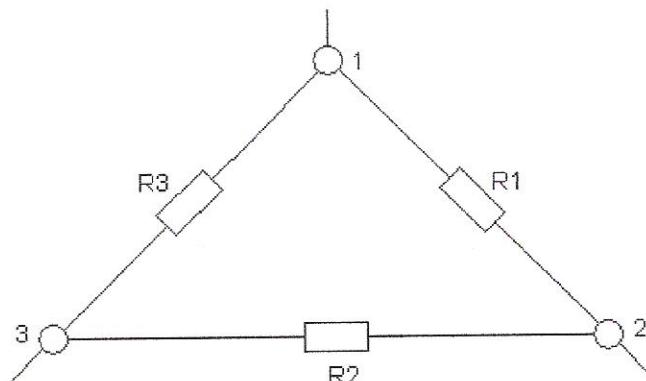
1. Teoretický rozbor WM:

Wheatsonov mostík (ďalej už len WM) sa používa pre laboratórne meranie veľkosti odporu. Teoretické, komplexné riešenie WM, tj. určenie veľkosti prúdov a napäť na mostíku, vyžaduje znalosť transfigurácie (tj. premeny, pretvorenia).

V praxi sa najčastejšie vyskytuje potreba nahradíť tzv. zapojenie do trojuholníka zapojením do tzv. hviezdy.

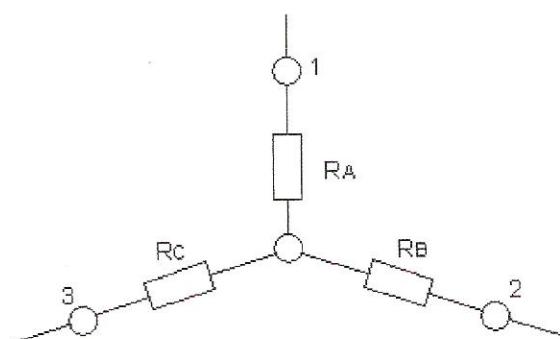
Princíp transfigurácie, tj. premeny zapojenia v trojuholníku na zapojenie vo hviezde spočíva v tom, že výsledný odpor medzi bodmi 1, 2, 3 musí byť rovnaký.

TROJUHOLNÍK

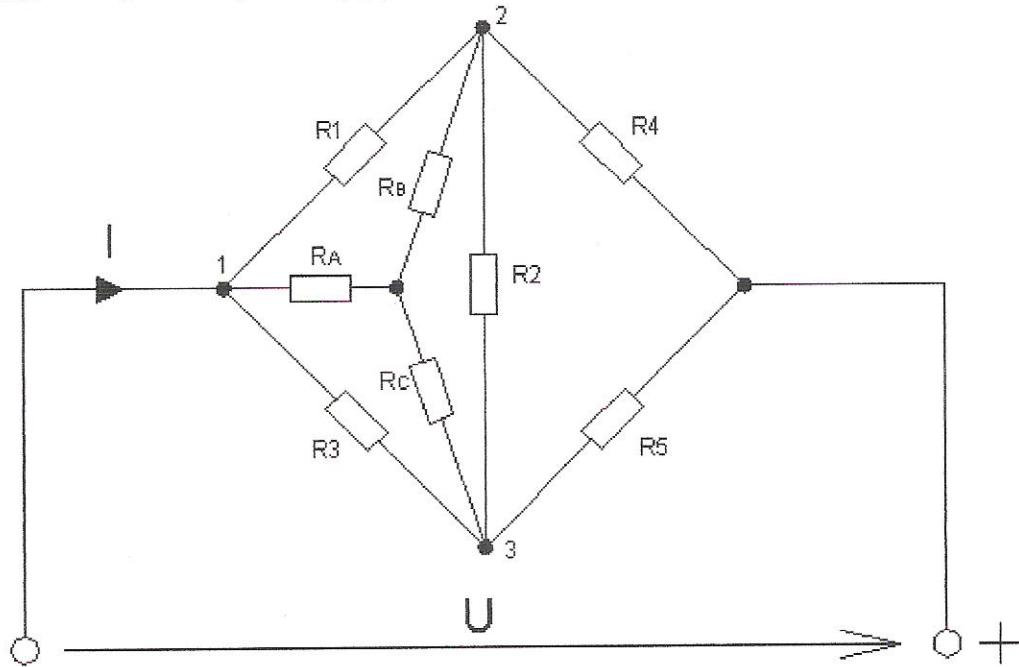


$10 \cdot 10^3$
 Ω_{V1}

HVIEZDA



Transfigurácia l'avej strany WM(výpočet I_{R4} , I_{R5} , U_{R4} , U_{R5} , I , R):



- A. Odpor medzi bodmi 1 a 2 v trojuholníku musí byť rovnaký ako odpor medzi bodmi 1 a 2 vo hviezde.

TROJUHOLNÍK:

$$\begin{aligned}\frac{1}{_T R_{1,2}} &= \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3} \\ \frac{1}{_T R_{1,2}} &= \frac{(R_2 + R_3) + R_1}{R_1 \cdot (R_2 + R_3)} \\ _T R_{1,2} &= \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}\end{aligned}$$

HVIEZDA:

$${}_H R_{1,2} = R_A + R_B$$

$$\begin{aligned}{}_T R_{1,2} &= {}_H R_{1,2} \\ \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} &= R_A + R_B\end{aligned}$$

B. Odpor medzi bodmi 1 a 3 v trojuholníku musí byť rovnaký ako odpor medzi bodmi 1 a 3 vo hviezde.

TROJUHOLNÍK:

$$\frac{1}{_T R_{1,3}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2}$$

$$\frac{1}{_T R_{1,3}} = \frac{(R_1 + R_2) + R_3}{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}$$

$$_T R_{1,3} = \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

HVIEZDA:

$$_H R_{1,3} = R_A + R_C$$

$$_T R_{1,3} = _H R_{1,3}$$

$$\frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_C$$

C. Odpor medzi bodmi 2 a 3 v trojuholníku musí byť rovnaký ako odpor medzi bodmi 2 a 3 vo hviezde.

TROJUHOLNÍK:

$$\frac{1}{_T R_{2,3}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3}$$

$$\frac{1}{_T R_{2,3}} = \frac{(R_1 + R_3) + R_2}{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}$$

$$_T R_{2,3} = \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3}$$

HVIEZDA:

$$_H R_{2,3} = R_B + R_C$$

$$_T R_{2,3} = _H R_{2,3}$$

$$\frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_B + R_C$$

Záver: Pre ďalší výpočet mám pripravenú sústavu troch rovnic:

$$\text{I. } (1 - 2) \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_B$$

$$\text{II. } (1 - 3) \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_C$$

$$\text{III. } (2 - 3) \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_B + R_C$$

Riešenie: Použijeme rovnice I. a III. :

$$\text{I.} \quad \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_B$$

$$\text{III.} \quad \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_B + R_C$$

$$\text{I.} \quad R_B = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - R_A$$

$$\text{III.} \quad R_B + R_C = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$\left[\frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - R_A \right] + R_C = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_A$$

$$R_C = \frac{R_2 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_A$$

Dosadíme do II. rovnice

$$\text{II.} \quad \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + R_C$$

$$\frac{R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = R_A + \frac{R_2 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_A$$

$$2R_A = -\frac{R_2 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{R_1 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Odvodíme si R_B z I. rovnice:

$$\text{I.} \quad R_B = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - R_A$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Odvodíme si R_C z III. rovnice:

$$\text{III.} \quad R_B + R_C = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Teraz prikročíme ku komplexnému riešeniu WM. Máme vypočítať:

- celkový prúd tečúci mostíkom(I)
- prúdy tečúce jednotlivými odporníkmi($I_{R1}, I_{R2}, I_{R3}, I_{R4}, I_{R5}$)
- napäcia na jednotlivých odporníkoch($U_{R1}, U_{R2}, U_{R3}, U_{R4}, U_{R5}$)
- celkový odpor mostíka(R)

Použijeme Ohmov zákon na výpočet celkového prúdu I:

$$I = \frac{U}{R} \quad \text{pričom } U \text{ je dané;}$$

Celkový odpor (R) WM:

$$R = R_A + R_{B,4,C,5}$$

$$\frac{1}{R_{B,4,C,5}} = \frac{1}{R_B + R_4} + \frac{1}{R_C + R_5}$$

$$\frac{1}{R_{B,4,C,5}} = \frac{R_4 + R_5 + R_B + R_C}{(R_B + R_4) \cdot (R_C + R_5)}$$

$$R_{B,4,C,5} = \frac{(R_B + R_4) \cdot (R_C + R_5)}{R_4 + R_5 + R_B + R_C}$$

Dosadíme do rovnice:

$$R = R_A + \frac{(R_B + R_4) \cdot (R_C + R_5)}{R_4 + R_5 + R_B + R_C}$$

Použijeme odvodené vzťahy pre R_A , R_B a R_C . Teraz dosadím za R_A a vypočítam celkový odpor WM:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + \frac{(R_B + R_4) \cdot (R_C + R_5)}{R_4 + R_5 + R_B + R_C}$$

Výpočet R realizujeme dosadením príslušných hodnôt.

Pre výpočet prúdov a napäti na jednotlivých odporníkoch potrebujeme vypočítať U_{RA}

$$U_{RA} = I \cdot R_A$$

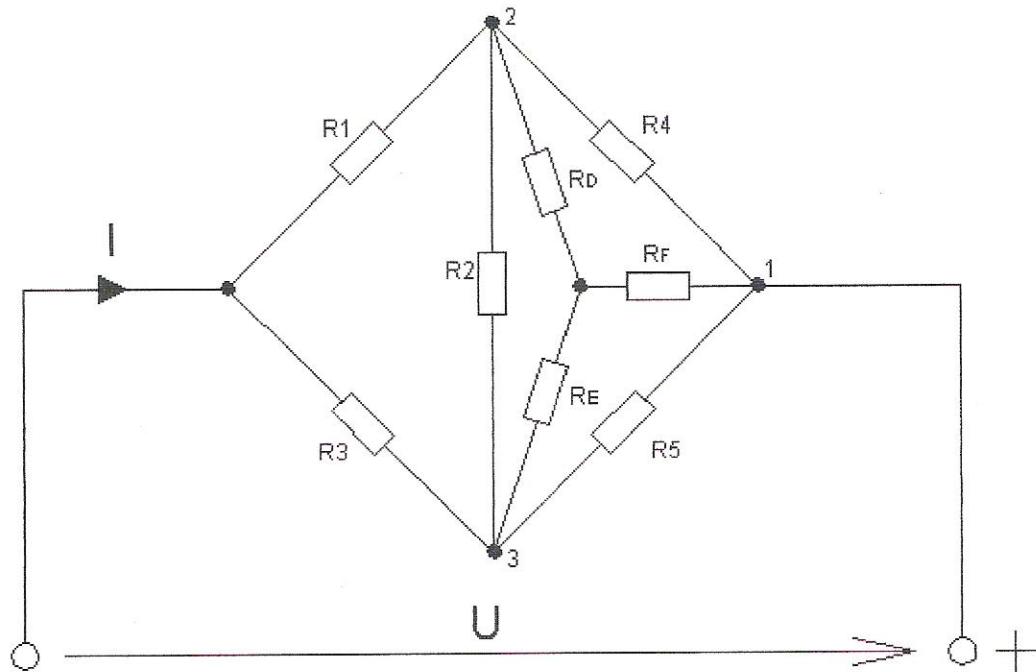
Na zostatku obvodu bude napätie, ktoré označíme ako U_1

$$U_1 = U - U_{RA}$$

Teraz vyriešime prúdy tečúce hornou a spodnou vetvou, pričom horná vetva je tvorená $R_B + R_4$ a spodná vetva je tvorená R_C a R_5 .

$$I_{R4} = \frac{U_1}{R_B + R_4} \Rightarrow U_{R4} = I_{R4} \cdot R_4 \quad I_{R5} = \frac{U_1}{R_C + R_5} \Rightarrow U_{R5} = I_{R5} \cdot R_5$$

Transfigurácia pravej strany WM(výpočet I_{R1} , I_{R3} , U_{R1} , U_{R3} ,):



- A. Odpor medzi bodmi 1 a 2 v trojuholníku musí byť rovnaký ako odpor medzi bodmi 1 a 2 vo hviezde.

TROJUHOLNÍK:

$$\frac{1}{_T R_{1,2}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2 + R_5}$$

$$\frac{1}{_T R_{1,2}} = \frac{(R_2 + R_5) + R_4}{R_4 \cdot (R_2 + R_5)}$$

$$_T R_{1,2} = \frac{R_4 \cdot (R_2 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5}$$

HVIEZDA:

$${}_H R_{1,2} = R_D + R_F$$

$$_T R_{1,2} = {}_H R_{1,2}$$

$$\frac{R_4 \cdot (R_2 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_F$$

B. Odpor medzi bodmi 1 a 3 v trojuholníku musí byť rovnaký ako odpor medzi bodmi 1 a 3 vo hviezde.

TROJUHOLNÍK:

$$\frac{1}{_T R_{1,3}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2 + R_4}$$

$$\frac{1}{_T R_{1,3}} = \frac{(R_2 + R_4) + R_5}{R_5 \cdot (R_2 + R_4)}$$

$$_T R_{1,3} = \frac{R_5 \cdot (R_2 + R_4)}{R_2 + R_4 + R_5}$$

HVIEZDA:

$$_H R_{1,3} = R_E + R_F$$

$$_T R_{1,3} = _H R_{1,3}$$

$$\frac{R_5 \cdot (R_2 + R_4)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_E + R_F$$

C. Odpor medzi bodmi 2 a 3 v trojuholníku musí byť rovnaký ako odpor medzi bodmi 2 a 3 vo hviezde.

TROJUHOLNÍK:

$$\frac{1}{_T R_{2,3}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4 + R_5}$$

$$\frac{1}{_T R_{2,3}} = \frac{(R_4 + R_5) + R_2}{R_2 \cdot (R_4 + R_5)}$$

$$_T R_{2,3} = \frac{R_2 \cdot (R_4 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5}$$

HVIEZDA:

$$_H R_{2,3} = R_D + R_E$$

$$_T R_{2,3} = _H R_{2,3}$$

$$\frac{R_2 \cdot (R_4 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_E$$

Záver: Pre ďalší výpočet máme pripravenú sústavu troch rovnic:

$$\text{I. } (1 - 2) \frac{R_4 \cdot (R_2 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_F$$

$$\text{II. } (1 - 3) \frac{R_5 \cdot (R_2 + R_4)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_E + R_F$$

$$\text{III. } (2 - 3) \frac{R_2 \cdot (R_4 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_E$$

Riešenie: Použijeme rovnice I. a III.

$$\text{I.} \quad \frac{R_4 \cdot (R_2 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_F$$

$$\text{III.} \quad \frac{R_2 \cdot (R_4 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_E$$

$$\text{I.} \quad R_D = \frac{R_2 \cdot R_4 + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} - R_F$$

$$\text{III.} \quad \frac{R_2 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_E$$

$$\left[\frac{R_2 \cdot R_4 + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} - R_F \right] + R_E = \frac{R_2 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$R_E = \frac{R_2 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} - \frac{R_2 \cdot R_4 + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} + R_F$$

$$R_E = \frac{R_2 \cdot R_5 - R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} + R_F$$

Dosadíme do II. rovnice:

$$\text{II.} \quad \frac{R_5 \cdot (R_2 + R_4)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_E + R_F$$

$$\frac{R_2 \cdot R_5 + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{R_2 \cdot R_5 - R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} + R_F + R_F$$

$$2R_F = -\frac{R_2 \cdot R_5 - R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} + \frac{R_2 \cdot R_5 + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$R_F = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

Odvodíme si R_D z I. rovnice:

$$\text{I.} \quad R_D = \frac{R_2 \cdot R_4 + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} - R_F$$

$$R_D = \frac{R_2 \cdot R_4 + R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} - \frac{R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$R_D = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4 + R_5}$$

Odvodíme si R_E z III. rovnice:

$$\text{III.} \quad \frac{R_2 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_E$$

$$R_E = \frac{R_2 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} - \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$R_E = \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

Pre výpočet prúdov a napäť na jednotlivých odporníkoch potrebujem vypočítať U_{RF}

$$U_{RF} = I \cdot R_F$$

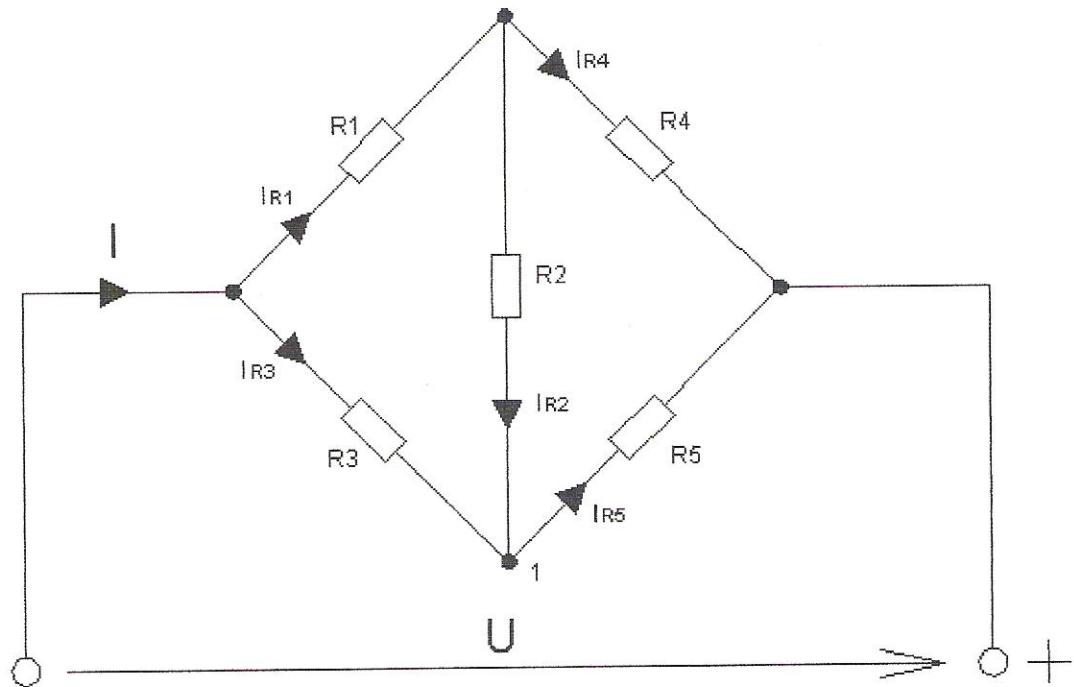
Na zostatku obvodu bude napätie, ktoré označím ako U_2

$$U_2 = U - U_{RF}$$

Teraz vyriešime prúdy tečúce hornou a spodnou vetvou, pričom horná vetva je tvorená $R_D + R_1$ a spodná vetva je tvorená R_E a R_3 .

$$I_{R1} = \frac{U_2}{R_D + R_1} \Rightarrow U_{R1} = I_{R1} \cdot R_1$$

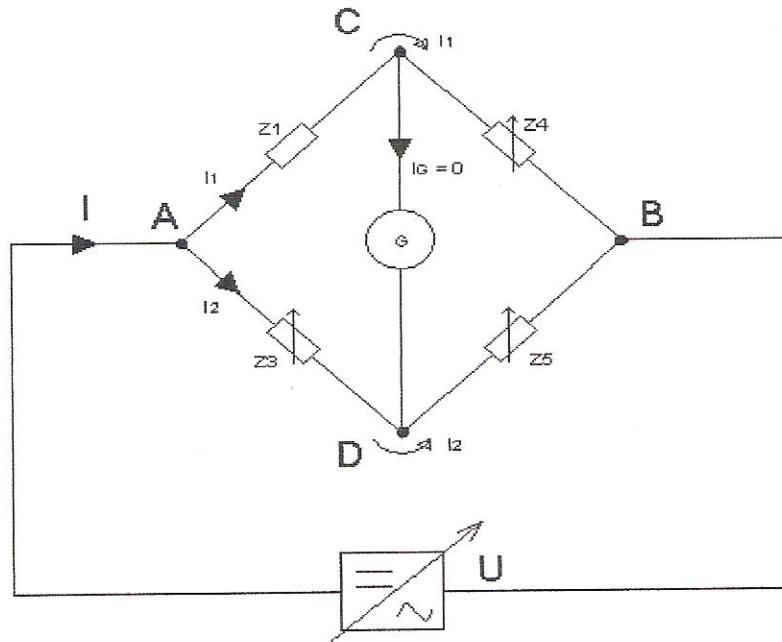
$$I_{R5} = \frac{U_2}{R_E + R_3} \Rightarrow U_{R3} = I_{R3} \cdot R_3$$



Ak poznáme hodnoty prúdov I_{R1} , I_{R3} , I_{R4} , I_{R5} , vyriešim prúd I_{R2} a napätie U_{R2} pomocou I . KZ. Napr. uzol č.1:

$$I_{R3} + I_{R2} - I_{R5} = 0 \Rightarrow I_{R2} = I_{R5} - I_{R3} \Rightarrow U_{R2} = I_{R2} \cdot R_2$$

2. Teoretický rozbor merania odporu na WM:



Teória obecného mostíka:

Na meranie odporu požívame tzv. vyvážený mostík. Základné zapojenie je zrejmé zo schémy.

Obecne nemusíme používať termín odpor, ale môžeme hovoriť o impedancii.

Impedancia Z_1 nech je neznáma; $Z_1 = Z_x$. Impedancie Z_2, Z_3, Z_4 sú známe a aspoň dve z nich sú premenné (regulovateľné).

Tzv. vyvážovanie mostíka spočíva v tom, že impedancie Z_2, Z_3, Z_4 meníme tak dlho, až kym diagonálou nepreteká žiadny prúd.

V praxi to realizujeme tak, že do diagonálnej zapojíme multimeter prepnutý na najmenší možný rozsah ($200\mu\text{A}$).

Pre vyvážený stav platí:

- 1) Medzi bodmi **C** a **D** nesmie byť žiadne napätie, tj. že potenciál bodu **C** sa musí rovnať potenciálu bodu **D**.
- 2) Z toho vyplýva, že úbytok napäťia na Z_1 sa musí rovnať úbytku napäťia na Z_3 a súčasne úbytok napäťia na Z_2 sa musí rovnať úbytku napäťia na Z_4 .

Matematické vyjadrenie poslednej napísanej podmienky je nasledovné:

$$I_1 \cdot Z_1 = I_2 \cdot Z_3$$

$$I_1 \cdot Z_2 = I_2 \cdot Z_4$$

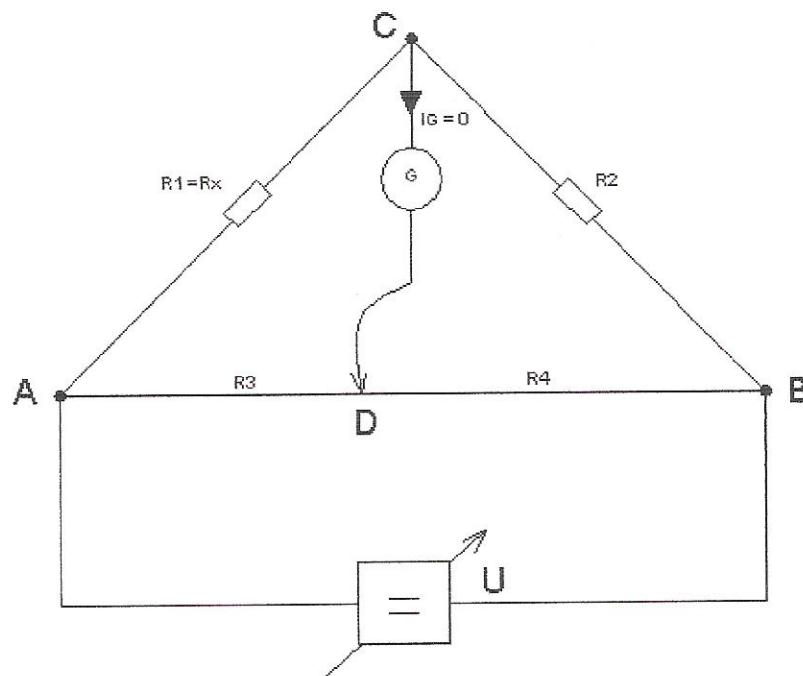
Rovnice výdelíme:

$$\frac{I_1 \cdot Z_1}{I_1 \cdot Z_2} = \frac{I_2 \cdot Z_3}{I_2 \cdot Z_4} \Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4} \Rightarrow Z_1 = Z_2 \cdot \frac{Z_3}{Z_4}$$

V prípade jednosmerného WM možno nahradíť impedanciu priamo odporom a dostať vztah:

$$R_x = R_2 \cdot \frac{R_3}{R_4}$$

POZNÁMKA: Jednoduchý WM možno vyrovnávať tak, že odpory R_3 a R_4 sú tvorené odporovým vodičom a vyrovnávanie realizujeme posuvom bežca (bod D) po tomto odporovom vodiči. Schéma je nasledovné:



Z elektrotechniky vieme, že odpor vodiča sa dá vyjadriť pomocou vzťahu:

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}$$

ρ - merný odpor, fyz. konšt. [Ωm]

l – dĺžka vodiča [m]

S – prierez vodiča [m^2]

Teda:

$$R_3 = \rho \cdot \frac{l_3}{S}$$

$$R_4 = \rho \cdot \frac{l_4}{S}$$

Dosadíme:

$$R_x = R_2 \cdot \frac{\rho \cdot \frac{l_3}{S}}{\rho \cdot \frac{l_4}{S}} = R_2 \cdot \frac{l_3}{l_4}$$

Záver:

Z odvodeného vzťahu vyplýva, že dosadzujeme presné úseky l_3 , l_4 s presnosťou na 1mm.
POZOR! Meranie je silne ovplyvnené prechodnými odpormi.

3. Výpočet parametrov WM zo zadaných hodnôt:

$$R_1 = 100 \Omega$$

$$R_2 = 220 \Omega$$

$$R_3 = 33 \Omega$$

$$R_4 = 120 \Omega$$

$$R_5 = 10 \Omega$$

$$U = 4,5 \text{ V}$$

$$I = 120 \text{ mA}$$

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 9,348 \Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = 62,323 \Omega$$

$$R_C = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = 20,567 \Omega$$

$$R = R_A + \frac{(R_B + R_4) \cdot (R_C + R_5)}{R_4 + R_5 + R_B + R_C} = 36,929 \Omega$$

$$R_D = \frac{R_2 \cdot R_4}{R_2 + R_4 + R_5} = 75,43 \Omega$$

$$R_E = \frac{R_2 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = 6,286 \Omega$$

$$R_F = \frac{R_4 \cdot R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = 3,43 \Omega$$

$$U_{RA} = I \cdot R_A = 1,122 \text{ V}$$

$$U_1 = U - U_{RA} = 3,4 \text{ V}$$

$$I_{R4} = \frac{U_1}{R_B + R_4} = 0,0186A \Rightarrow U_{R4} = I_{R4} \cdot R_4 = 2,232V$$

$$I_{R5} = \frac{U_1}{R_C + R_5} = 0,111A \Rightarrow U_{R5} = I_{R5} \cdot R_5 = 1,11V$$

$$U_{RF} = I \cdot R_F = 0,4141V$$

$$U_2 = U - U_{RF} = 4,0884V$$

$$I_{R1} = \frac{U_2}{R_D + R_1} = 0,023A \Rightarrow U_{R1} = I_{R1} \cdot R_1 = 2,3V$$

$$I_{R5} = \frac{U_2}{R_E + R_3} = 0,111A \Rightarrow U_{R3} = I_{R3} \cdot R_3 = 3,432V$$

$$I_{R2} = I_{R1} - I_{R4} = 0,0044A \Rightarrow U_{R2} = I_{R2} \cdot R_2 = 1,54V$$