

①
J. Rastislav Hornák

Komplexná práca č I/4

Riešenie Wheatstoneovho mostíka

4.D

Obsah:

- | | |
|---|-----------|
| 1. Teoretický rozbor Wheatstoneovho mostíka | str. 1/11 |
| 2. Teoretický rozbor merania odporu na Wheatstoneovom mostíku | str. 6/11 |
| 3. Výpočet parametrov Wheatstoneovho mostíka zo zadaných hodnôt | str. 7/11 |
| 4. Overenie vypočítaných hodnôt meraním | str. 8/11 |
| 5. Meranie odporu na laboratórnom Wheatstoneovom mostíku | str. 9/11 |

Komplexná práca č. I/4 Riešenie Wheatstoneovho mostíka

①
M

Teoretický rozbor Wheatstoneovho mostíka

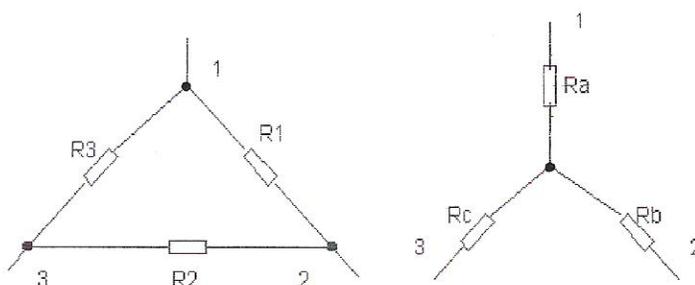
Wheatstoneov mostík sa používa pre laboratórne merania veľkosti odporu.

Teoretické komplexné riešenie w. m., tj. Určenie

- a) Veľkostí prúdov
- b) Veľkostí napätí

Vyžaduje znalosť transfigurácie (premeny) zapojenia.

V praxi sa najčastejšie vyskytuje potreba nahradiť tzv. zapojenie do trojuholníka zapojením do hviezdy. Princíp transfigurácie spočíva v tom, že výsledky odporov medzi bodmi 1,2,3 musia byť rovnaké.



- a) Odpor medzi bodmi 1 a 2 v trojuholníku musí byť rovnaký ako vo hviezde.

$$\frac{1}{TR_{1,2}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + R_3}$$

$$iR_{1,2} = \frac{R_2(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = Ra + Rb = hR_{1,2}$$

- b) Odpor medzi bodmi 1 a 3 v trojuholníku musí byť rovnaký ako vo hviezde.

$$\frac{1}{TR_{1,3}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + R_1}$$

$$iR_{1,3} = \frac{R_3(R_2 + R_1)}{R_1 + R_2 + R_3} = Ra + Rc = hR_{1,3}$$

- c) Odpor medzi bodmi 2 a 3 v trojuholníku musí byť rovnaký ako vo hviezde.

$$\frac{1}{TR_{2,3}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 + R_3}$$

$$iR_{2,3} = \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = Rc + Rb = hR_{2,3}$$

Záver:

Pre ďalší výpočet máme pripravenú sústavu 3 rovníc:

$$I \quad \frac{R_2(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = Ra + Rb$$

$$\text{II} \quad \frac{R_3(R_2 + R_1)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_a + R_c$$

$$\text{III} \quad \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_c + R_b$$

Z I sme si vyjadrili R_b a dosadili do III a vyšlo nám R_c :

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - R_a$$

$$R_b + R_c = \frac{R_2 R_1 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$\frac{R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - R_a + R_c = \frac{R_2 R_1 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 - R_1 R_2 + R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_a$$

$$R_c = \frac{R_2 R_3 - R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_a$$

Toto dosadíme do II a po vykrátení:

$$\text{II} \quad \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_a + R_c$$

$$R_a = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Teraz R_a dosadíme do vyjadreného R_b :

$$R_b = \frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 - R_1 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

Z III vyjadríme R_c a dosadíme R_b :

$$\frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} = R_b + R_c$$

$$R_c = \frac{R_2 R_1 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_c = \frac{R_2 R_1 + R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3} - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{R_2 R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

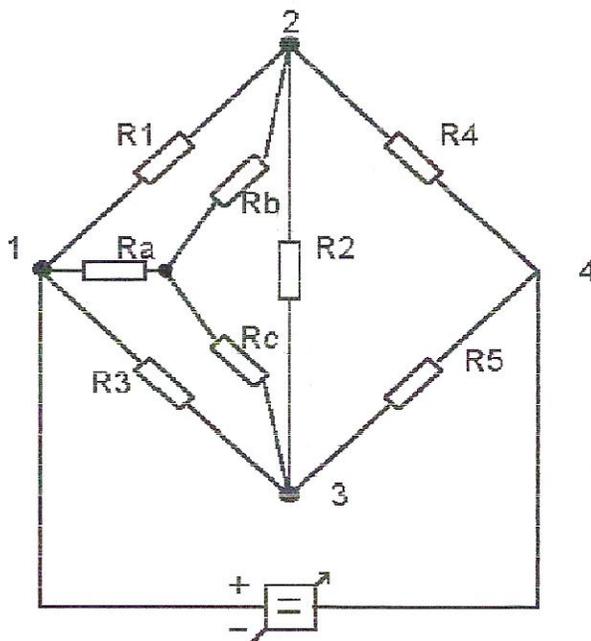
Teraz prikróčime ku komplexnému riešeniu Whetstoneovho mostíka.

Máme vypočítať :

I celkový

$I_1; I_2; I_3; I_4; I_5$; – prúdy tečúce jednotlivými odpormi

$U_1; U_2; U_3; U_4; U_5$; – napätia na jednotlivých odporoch



Použijeme Ohmov zákon $I=U/R$ a U máme zadané.

$$R = R_A + R_{B4C5}$$

$$R_{B4C5} = \frac{(R_B + R_4)(R_C + R_5)}{R_B + R_4 + R_C + R_5}$$

Dosadením a úpravou odvodených vzťahov R_a, R_b, R_c nezískame jednoduchší tvar.

Výpočet celkového odporu mostíka realizujeme výpočtom na kalkulačke.

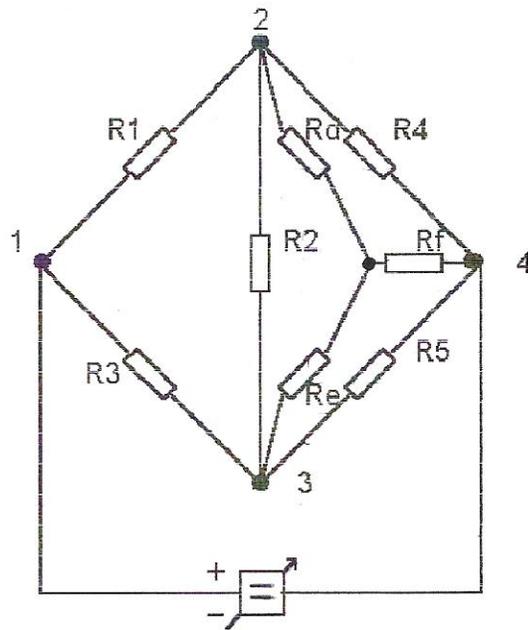
$$U_{RA} = I \cdot R_A$$

Na zostatku obvodu bude napätie ktoré označíme ako $U_1 = U - U_{RA}$

Teraz vyriešime prúdy tečúce hornou ($R_B + R_4$) a spodnou ($R_C + R_5$) vetvou.

$$I_{R4} = \frac{U_1}{R_B + R_4} \quad I_{R5} = \frac{U_1}{R_C + R_5} \quad U_{R4} = I_{R4} \cdot R_4 \quad U_{R5} = I_{R5} \cdot R_5$$

Obdobne zavedieme aj transfiguráciu pravej strany:



trojuholník

$$\frac{1}{R_{4,5}} = \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2 + R_5}$$

$$R_{4,5} = \frac{R_4(R_2 + R_5)}{R_4 + R_2 + R_5}$$

$$\frac{1}{R_{2,5}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4 + R_5}$$

$$R_{2,5} = \frac{R_2(R_4 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$\frac{1}{R_{2,4}} = \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_2 + R_4}$$

$$R_{2,4} = \frac{R_5(R_2 + R_4)}{R_2 + R_4 + R_5}$$

hviezda

$$R_{1,2} = R_D + R_F$$

$$\frac{R_4(R_2 + R_5)}{R_4 + R_2 + R_5} = R_D + R_F \quad \text{I}$$

$$R_{2,5} = R_D + R_E$$

$$\frac{R_2(R_4 + R_5)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_E \quad \text{II}$$

$$R_{2,4} = R_E + R_F$$

$$\frac{R_5(R_2 + R_4)}{R_2 + R_4 + R_5} = R_E + R_F \quad \text{III}$$

$$I \quad \frac{R_2 R_4 + R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_F \Rightarrow R_D = \frac{R_2 R_4 + R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} - R_F$$

$$II \quad \frac{R_2 R_4 + R_2 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + R_E$$

Dosadíme do II rovnice

$$R_E = \frac{R_2 R_4 + R_2 R_5 - R_2 R_4 - R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} + R_F$$

$$R_E = \frac{R_2 R_5 - R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} + R_F$$

Dosadíme do II rovnice

$$\frac{R_2 R_5 + R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} + \frac{R_2 R_5 - R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} + R_F + R_F$$

$$2R_F = \frac{2R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} \Rightarrow R_F = \frac{R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

dosadíme do I rovnice

$$\frac{R_2 R_4 + R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = R_D + \frac{R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$R_D = \frac{R_2 R_4 + R_4 R_5 - R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} \Rightarrow R_D = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4 + R_5}$$

Dosadíme do III. rovnice

$$\frac{R_2 R_4 + R_2 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4 + R_5} + R_E$$

$$R_D = \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4 + R_5} \quad R_E = \frac{R_2 R_5}{R_2 + R_4 + R_5} \quad R_F = \frac{R_4 R_5}{R_2 + R_4 + R_5}$$

$$U_{RF} = I \cdot R_F \quad U_2 = U - U_{RF}$$

$$I_{R1} = \frac{U_2}{R_D + R_1} \quad I_{R3} = \frac{U_2}{R_E + R_3}$$

$$U_{R1} = I_{R1} \cdot R_1 \quad U_{R3} = I_{R3} \cdot R_3$$

Na záver rozboru w.m.sa zameriame na vyriešenie prúdu I_{R2} a U_{R2} .

Aby sme toto mohli vyriešiť, musíme mať vypočítané hodnoty ostaných prúdov.

Napr. Pre názornosť si vezmime uzol 3. Vyšlo nám že $I_{R3} > I_{R5}$ čiže v zmysle 1. Kirhofovho zákona bude platiť:

$$I_{R3} = I_{R2} + I_{R5}$$

$$I_{R2} = I_{R3} - I_{R5}$$

$$U_{R2} = I_{R2} \cdot R_2$$

Teoretický rozbor merania odporu na Wheatstoneovom mostíku

Na meranie (výpočet) použijeme tzv. vyvážený mostík.

Obecne nemusíme použiť termín odpor o impedancii.

$Z_1=Z_x$ neznáma, Z_2, Z_3, Z_4 sú známe a aspoň 2 premenné.

Vyváženie mostíka spočíva v tom, že Z_2, Z_3, Z_4 meníme pokým diagonálou nepreteká žiadny prúd. V praxi tam zapojíme citlivý μA -meter.

Pre vyvážený stav platí:

a) Medzi bodmi C a D nesmie byť žiadne napätie tj. Potenciál bodu C = potenciálu bodu D.

b) Z toho vyplýva, že úbytky napätia na $U_{Z1} = U_{Z3}$ a $U_{Z2} = U_{Z4}$.

$$I_1 \cdot Z_1 = I_2 \cdot Z_3$$

$$I_1 \cdot Z_2 = I_2 \cdot Z_4$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}$$

$$Z_x = \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_4}$$

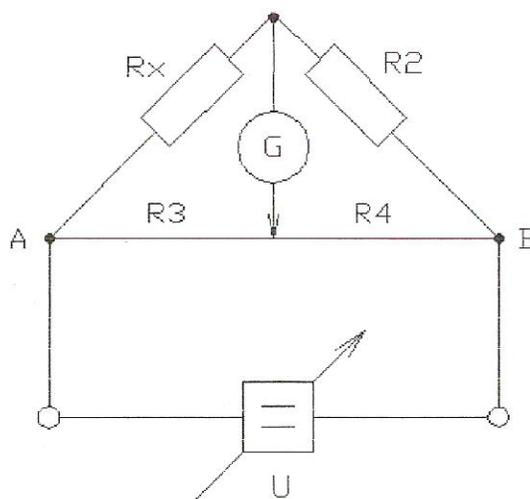
$$\text{V prípade jednosmerného mostíka } R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4}$$

Pozn.:

Jednoduchý mostík je realizovaný tak, že odpory R_3, R_4 sú tvorené odporovým drôtom a vyváženie mostíka realizujeme posúvaním bežca po drôte.

$$R = \frac{\rho l}{S}$$

$$R_x = \frac{R_2 R_3}{R_4} = \frac{R_2 \cdot \frac{\rho l_3}{S_3}}{\frac{\rho l_4}{S_4}} = \frac{R_2 l_3}{l_4}$$



Pozor!

Meranie je silno ovplyvnené prechodovým odporom.

Výpočet parametrov wheatstoneovho mostíka zo zadaných hodnôt

Úloha cvičenia :

- Navrhnete zapojenie (hodnoty odporov), aby boli splnené nasledovné podmienky
 - Prúd vtekajúci do mostíka nesmie prekročiť hodnotu 150 mA
 - Minimálny prúd tečúci jednotlivými odporníkmi je 5 μ A
 - Napájacie napätie nesmie prekročiť 20V
 - Hodnoty odporníkov musia spĺňať hodnotu z rady E12.
- Do pripravenej tabuľky zaznamenajte : Rozn, Rzmerané, Ivyp, Izmer, Uvyp, Uzmer.
- Mostík doma zostavte a prineste na vyučovanie

| R | Rozn [Ω] | Rzmer [Ω] | Ivyp [mA] | Uvyp [V] |
|----|-------------------|--------------------|-----------|----------|
| R1 | 68 | 69,1 | 71,1 | 4,921 |
| R2 | 22 | 25,3 | 0,85 | 0,0215 |
| R3 | 150 | 151,9 | 32,5 | 4,934 |
| R4 | 56 | 58,2 | 70,2 | 4,088 |
| R5 | 120 | 122 | 33,3 | 4,066 |

| Rvyp [Ω] | Rzmer [Ω] |
|-------------------|--------------------|
| 86,8 | 85,1 |

$$Ra = \frac{69,1 \cdot 151,9}{246,3} = 42,61\Omega$$

$$Rb = \frac{69,1 \cdot 25,3}{246,3} = 7,09\Omega$$

$$Rc = \frac{25,3 \cdot 151,9}{246,3} = 15,6\Omega$$

$$Rd = \frac{25,3 \cdot 58,2}{205,5} = 7,16$$

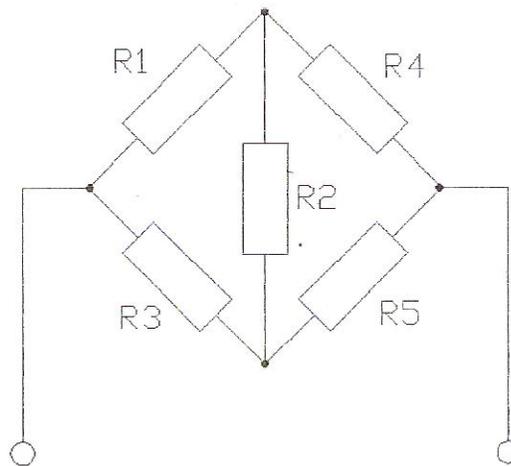
$$Re = \frac{25,3 \cdot 122}{205,5} = 15,02\Omega$$

$$58,2 \cdot 122$$

$$Rf = \frac{58,2 \cdot 122}{205,5} = 34,55\Omega$$

$$R = 42,61 + \frac{(7,09 + 58,2) \cdot (15,6 \cdot 122)}{58,2 + 122 + 7,09 + 15,6} = \frac{65,29 \cdot 137,6}{202,89} = 86,8$$

Overenie vypočítaných hodnôt meraním

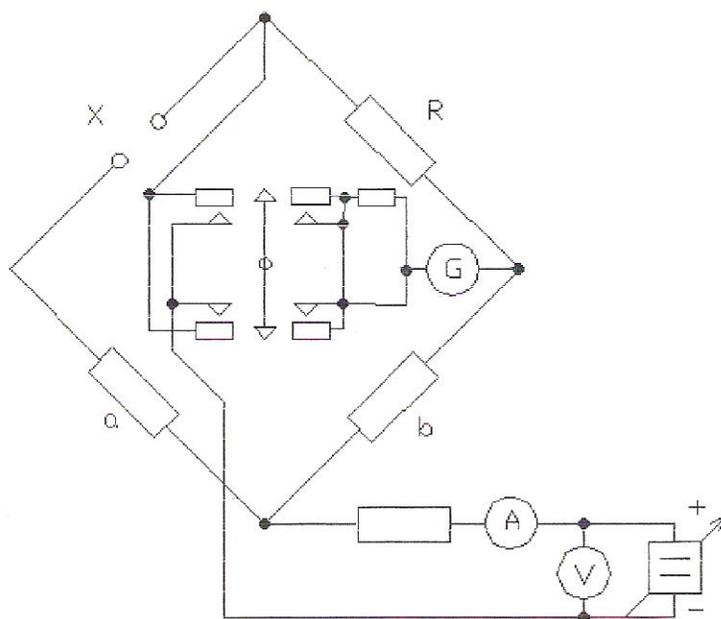
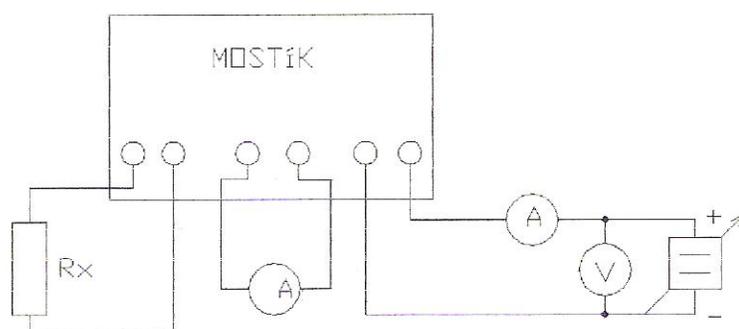


| R | Rozn [Ω] | Rzmer [Ω] | Ivyp [mA] | Izmer [mA] | Uvyp [V] | Uzmer [V] |
|----|-------------------|--------------------|-----------|------------|----------|-----------|
| R1 | 68 | 69,1 | 71,1 | 72 | 4,921 | 4,97 |
| R2 | 22 | 25,3 | 0,85 | 0,445 | 0,0215 | 0,0183 |
| R3 | 150 | 151,9 | 32,5 | 33 | 4,934 | 4,99 |
| R4 | 56 | 58,2 | 70,2 | 71,2 | 4,088 | 4,03 |
| R5 | 120 | 122 | 33,3 | 33,7 | 4,066 | 4,01 |

Meranie odporov na laboratórnem Wheatstoneovom mostiku

Úloha cvičenia:

1. Zoznámte sa s vyhotovením a obsluhou laboratórneho w.m.
2. Zmerajte 6 odporov na laboratórnem w.m.
3. Meraním zistíte optimálne napájacie napätie mostika.
4. Spracujte vyhodnotenie merania



Postup pri meraní:

Predložených 6 odporov sme si predmerali na digitálnom multimetri, aby sme orientačne vedeli nastaviť hodnotu odporu R na laboratórnom wheatstoneovom mostíku.

Zmerané hodnoty sme si zapísali do tabuľky.

Potom sme pripojili na meracie svorky prvý odpor a nastavili sme hodnotu R na mostíku takú akú nám zmeral multimeter.

Pomer a/b (1,10,100,1000) sme nastavili podľa veľkosti odporu tak aby $R_{zm} = R \cdot (a/b)$.

Potom sme už iba malou zmenou R nastavili $I_g \rightarrow 0$.

Vtedy $R \cdot (a/b) = R_{zw}$.

Namerané hodnoty sme zapísali do tabuľky a postup sme opakovali pri meraní ďalších odporov.

Potom sme ešte merali závislosť veľkosti odporu ktorú zmeráme mostíkom od napájacieho napätia s krokom 2V do $U_{max} = 20V$.

Namerané hodnoty sme zapísali do tabuľky.

| n | R_o [Ω] | R_{zm} [Ω] | R_{zw} [Ω] | I_{vs} [mA] | I_g [μA] | U_{vs} [V] | Odchylka [%] |
|---|--------------------|-----------------------|-----------------------|---------------|-------------------|--------------|--------------|
| 1 | 200 | 197 | 196,9 | 90,8 | 0 | 10,09 | -1,55 |
| 2 | 180 | 185 | 186 | 96,3 | 0 | 10,09 | 3,3 |
| 3 | 150 | 148 | 150 | 116,7 | 0 | 10,09 | 0 |
| 4 | 500 | 497 | 500 | 38,3 | 0 | 10,09 | 0 |
| 5 | 150 | 152 | 152,4 | 115,2 | 0 | 10,09 | 1,6 |
| 6 | 510 k | 503k | - | - | - | - | - |

| n | U [V] | I [mA] | I_g [μA] | R_{zm} [Ω] |
|----|-------|--------|-------------------|-----------------------|
| 1 | 2 | 17,9 | 0 | 196,9 |
| 2 | 4 | 36 | 0 | 196,9 |
| 3 | 6 | 54,4 | 0 | 196,9 |
| 4 | 8 | 72,5 | 0 | 196,9 |
| 5 | 10 | 90,2 | 0 | 196,9 |
| 6 | 12 | 103,2 | 0 | 196,9 |
| 7 | 14 | 126,3 | 0 | 196,9 |
| 8 | 16 | 144,3 | 0 | 196,9 |
| 9 | 18 | 162,2 | 0 | 196,9 |
| 10 | 20 | 179,4 | 0,1 | 196,9 |

Vyhodnotenie merania:

Meranie z môjho pohľadu, keďže sme použili iba dva pomocné meracie prístroje – ampérmete, ktorým sme merali napájací prúd a voltmeter, ktorým sme merali napájacie napätie., bolo prehľadné a aj pomerne jednoduché. Najprv bolo potrebné si odporníky predmerať, aby sme rádo vo vedeli nastaviť veľkosť R.

Presné bolo iba pri meraní odporov rádovo stoviek ohmov. $510\text{k}\Omega$ odpor sa nám ani nepodarilo zmerať. Najpresnejšie sme odmerali rezistor R1. Nameraná odchyľka medzi digitálnym multimetrom a mostíkom bola iba $0,1\Omega$.

Náročné bolo v tom, že použité laboratórne wheatstoneove mostíky mali značne skorodované kontakty ktorých prechodový odpor ovplyvňoval meranie. Túto „závadu“ sme rýchlo odstránili a meranie už potom prebiehalo rýchlo a hladko – jeden obsluhoval mostík a druhý zapisoval namerané hodnoty.

Vzhľadom na malé napájacie napätie – $U_{\text{max}} = 20\text{V}$ - počas merania nebolo potrebné použiť žiadne mimoriadne bezpečnostné predpisy.